CHƯƠNG

3 NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

Tài liệu do tập thể giáo viên nhóm STRONG TEAM TOÁN VD-VDC biên soạn.

Chuyên đề. TÍCH PHÂN

I LÝ THUYẾT.

I. ĐỊNH NGHĨA – CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN:

1. Định nghĩa

Cho hàm số f liên tục trên K và a,b là hai số bất kỳ thuộc K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì hiệu số $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của f từ a đến b và kí hiệu là $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$. Trong trường hợp $a<b$, ta gọi $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$ là tích phân của f trên đoạn $[a;b]$.

Người ta dùng kí hiệu $F(x)\big|_a^b$ để chỉ hiệu số $F(b)-F(a)$. Như vậy Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$.

2. Tính chất

a) *Giả sử f,g liên tục trên K và a,b,c là ba số bất kì thuộc K. Khi đó ta có*

- $\int_a^a f(x).\mathrm{d}x = 0$
- $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x).\mathrm{d}x$
- $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x + \int_b^c f(x).\mathrm{d}x = \int_a^c f(x).\mathrm{d}x$
- $\int_a^b [f(x)+g(x)].\mathrm{d}x = \int_a^b f(x).\mathrm{d}x + \int_a^b g(x).\mathrm{d}x$
- $\int_a^b k.f(x).\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x).\mathrm{d}x$ *với* $k \in R$.

b) *Trên đoạn $[a;b]$ ta có:*

- Nếu $f(x) \ge 0$ trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x \ge 0$.

- Nếu $f(x) \geq g(x)$ trên $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x).\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x).\mathrm{d}x$.

c) Với hàm số f liên tục và số thực dương a, ta có hai tính chất sau đây:

- Nếu f là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x).\mathrm{d}x = 0$.

- Nếu f là hàm số chẵn trên đoạn $[-a;a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x).\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x).\mathrm{d}x$.

Minh họa:

Ví dụ 1:

[Mức độ 1] Tính $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{3}{x} + e^x\right).\mathrm{d}x$

Lời giải

$$\int_1^2 \left(x^3 - \frac{3}{x} + e^x\right).\mathrm{d}x = \left.\left(\frac{x^4}{4} - 3\ln x + e^x\right)\right|_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 3\ln 2 + e^2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 3\ln 1 + e^1\right) = \frac{3}{4} - 3\ln 2 + e^2 - e.$$

Ví dụ 2:

[Mức độ 1] Tính $\int_0^1 \frac{\pi(x+1).\cos \pi x + 2}{x+1}.\mathrm{d}x$

Lời giải

$$\int_0^1 \frac{\pi(x+1).\cos \pi x - 2}{x+1}.\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \cos \pi x.\mathrm{d}x - 2\int_0^1 \frac{1}{x+1}.\mathrm{d}x = \sin \pi x\Big|_0^1 - 2\ln|x+1|\Big|_0^1$$
$$= (0-0) - 2(\ln 2 - 0) = -\ln 4.$$

Ví dụ 3:

[Mức độ 2] Tính $\int_{-1}^1 |x^2 + 2x|.\mathrm{d}x$.

Lời giải

$x^2 + 2x$ có bảng dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x^2+2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do vậy, $\int_{-1}^{1}\left|x^2+2x\right|.\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\left|x^2+2x\right|.\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left|x^2+2x\right|.\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}-\left(x^2+2x\right).\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\left(x^2+2x\right).\mathrm{d}x$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}$$

$$=-\left[0-\left(-\frac{1}{3}+1\right)\right]+\left[\left(\frac{1}{3}+1\right)-0\right]=2.$$

Ví dụ 4:

[Mức độ 2] Biết $\int_{1}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$, $\int_{1}^{2} g\left(x\right)\mathrm{d}x=5$. Tính $\int_{1}^{2}[6f\left(x\right)+7g\left(x\right)]\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có: $\int_{1}^{2}\left[6f\left(x\right)+7g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}6f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}7g\left(x\right)\mathrm{d}x=6\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+7\int_{1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=6.3+7.5=53.$

Ví dụ 5:

[Mức độ 2] Biết $\int_{1}^{2}\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\mathrm{d}x\right]=7$ và $\int_{1}^{2}\left[5f\left(x\right)+11g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=21$. Tính

Lời giải

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases}\int_{1}^{2}\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=7\\ \int_{1}^{2}\left[5f\left(x\right)+11g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int_{1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=7\\ 5\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+11\int_{1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\\ \int_{1}^{2}g\left(x\right)\mathrm{d}x=1\end{cases}$$

Vậy $\int_{1}^{2}[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=2+1=3.$

Ví dụ 6:

[Mức độ 2] Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0,10\right]$ [0, 10] và $\int_{0}^{10}f\left(x\right)\mathrm{d}x=7$,

$\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $P=\int_{0}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{6}^{10}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\int_0^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^6 f(x)\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7 \Leftrightarrow \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_6^{10} f(x)\mathrm{d}x = 7-3=4$

Vậy $P=4$.

I. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN:

1. Phương pháp đổi biến:

a. Cơ sở lý thuyết:

Nếu đặt $t=u(x)$ *thì ta được* $\int_a^b f(u(x)).u'(x).\mathrm{d}x = \int_a^b f(u(x)).\mathrm{d}(u(x)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t).\mathrm{d}t$.

b. Minh họa:

Ví dụ 1

[Mức độ 1] Tính $\mathrm{I} = \int_0^1 (1-2\mathrm{x})^5 \mathrm{dx}$.

Lời giải

Đặt $\mathrm{t} = 1-2\mathrm{x}$, ta được:

+ $\mathrm{dt} = -2.\mathrm{dx}$

+ Đổi cận: $\mathrm{x}=0 \Rightarrow \mathrm{t}=1$
$\mathrm{x}=1 \Rightarrow \mathrm{t}=-1$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (1-2\mathrm{x})^5 \mathrm{dx} = \int_0^1 -\frac{1}{2}(1-2\mathrm{x})^5(-2.\mathrm{dx}) = \int_1^{-1} -\frac{1}{2}.\mathrm{t}^5.\mathrm{dt} = \frac{-1}{2}.\frac{\mathrm{t}^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Ta thường dùng cách trình bày như sau:

Đặt $\mathrm{t} = 1-2\mathrm{x}$, ta được:

+ $\mathrm{dt} = -2.\mathrm{dx} \Leftrightarrow \mathrm{dx} = -\frac{1}{2}.\mathrm{dt}$

+ Đổi cận:

$\mathrm{x}=0 \Rightarrow \mathrm{t}=1$
$\mathrm{x}=1 \Rightarrow \mathrm{t}=-1$

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (1-2\mathrm{x})^5 \mathrm{dx} = \int_0^1 \mathrm{t}^5\left(-\frac{1}{2}.\mathrm{dt}\right) = \frac{-1}{2}.\frac{\mathrm{t}^6}{6}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Ví dụ 2

[Mức độ 2] Tính $\mathrm{I} = \int_0^1 (1+3\mathrm{x})^{10}(1+\mathrm{x})\mathrm{dx}$

Lời giải

Đặt: $t = 1 + 3x$, ta được:

+ $dt = 3.dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3}$

+ Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow t = 4$$

$$I = \int_0^1 (1+3x)^{10}(1+x)dx = \int_1^4 t^{10}\left(1+\frac{t-1}{3}\right)dt = \frac{1}{3}\int_1^4 t^{10}(2+t)dt$$
$$= \frac{1}{3}\int_1^4 (2t^{10}+t^{11})dt = \frac{1}{3}\left(2\frac{t^{11}}{11}+\frac{t^{12}}{12}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{1}{2}\left(\frac{2.4^{12}}{11}-\frac{4^{12}}{12}\right).$$

Ví dụ 3

[Mức độ 2] Tính $I = \int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}(1-x)dx$

Lời giải

Đặt $t = \sqrt[3]{(1+7x)}$, ta được:

+ $x = \frac{t^3-1}{7} \Rightarrow dx = \frac{3t^2}{7}.dt$

+ Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow t = 1$$
$$x = 1 \Rightarrow t = 2$$

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{1+7x}(1-x)dx = \int_1^2 t\left(1-\frac{t^3-1}{7}\right)dt = \frac{1}{7}\int_1^2 (8t-t^4)dt$$
$$= \frac{1}{7}\left(4t^2-\frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{1}{7}\left(4(4-1)-\frac{1}{5}(32-1)\right) = \frac{29}{35}.$$

2. Phương pháp từng phần

a. Cơ sở lý thuyết: $\int_a^b u(x).v'(x).dx = u(x).v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x).v(x).dx$.

(Viết gọn là $\int_a^b u.dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$).

Để tìm $I = \int_a^b f(x).dx$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Biến đổi tích phân ban đầu về dạng: $I = \int_a^b f(x).dx = \int_a^b u(x).v'(x).dx$

Bước 2: Đặt: $\begin{cases} u = u(x) \\ \mathrm{d}v = v'(x).\mathrm{d}x \end{cases}$ chọn $\begin{cases} \mathrm{d}u \\ v \end{cases}$.

Bước 3: $I = \int\limits_a^b u.\mathrm{d}v = u.v\Big|_a^b - \int\limits_a^b v.\mathrm{d}u$.

* **Lưu ý:** Khi lựa chọn hàm đặt u ta ưu tiên theo thứ tự "LOGARIT – ĐA THỨC – LƯỢNG GIÁC, MŨ"

b. Minh họa:

Câu 1

[Mức độ 2] Tính $I = \int\limits_0^1 x.\mathrm{e}^{2x}$.

Lờigiải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = e^{2x} \end{cases}$, ta tính được $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và chọn $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

Khi đó $I = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1 = \left(\frac{e^2}{2} - 0\right) - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2+1}{4}$.

Câu 2

[Mức độ 2] Tìm $I = \int\limits_0^\pi x.\sin 2x.\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x \\ \mathrm{d}v = \sin 2x.\mathrm{d}x \end{cases}$, ta tính được $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ và chọn $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

$I = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \cos 2x.\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x\cos 2x\Big|_0^\pi + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_0^\pi$

$= -\frac{1}{2}(\pi - 0) + \frac{1}{4}(0 - 0) = -\frac{\pi}{2}$.

Câu 3

[Mức độ 2] Tính $I = \int\limits_1^e x\ln x.\mathrm{d}x$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ \mathrm{d}v = x.\mathrm{d}x \end{cases}$, ta tính được $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ và chọn $v = \frac{1}{2}x^2$.

Khi đó $I = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{2}x.\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{4}x^2\Big|_1^e = \frac{1}{2}\left(e^2 - 0\right) - \frac{1}{4}\left(e^2 - 1\right) = \frac{e^2+1}{4}$.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Câu 1. Biết $\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int\limits_1^2 g(x)\mathrm{d}x = 6$, khi đó $\int\limits_1^2 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 8. **B.** -4. **C.** 4. **D.** -8.

Câu 2. Biết tích phân $\int\limits_0^1 f(x)dx = 3$ và $\int\limits_0^1 g(x)dx = -4$. Khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) + g(x)]dx$ bằng

A. -7. **B.** 7. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 3. Biết $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 2$ và $\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = -4$, khi đó $\int_0^1 [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. 6. **B.** -6. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 4. Biết $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 3$, khi đó $\int\limits_0^1 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ bằng

A. -1. **B.** 1. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 5. Tính tích phân $I = \int\limits_1^e x\ln x dx$.

A. $I = \dfrac{e^2 - 1}{4}$ **B.** $I = \dfrac{1}{2}$ **C.** $I = \dfrac{e^2 - 2}{2}$ **D.** $I = \dfrac{e^2 + 1}{4}$

Câu 6. $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{2x + 3}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}\ln 35$ **B.** $\ln\dfrac{7}{5}$ **C.** $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{7}{5}$ **D.** $2\ln\dfrac{7}{5}$

Câu 7. Cho $\int\limits_0^6 f(x)dx = 12$. Tính $I = \int\limits_0^2 f(3x)dx.$

A. $I = 5$ **B.** $I = 36$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = 6$

Câu 8. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t) = \dfrac{1}{150}t^2 + \dfrac{59}{75}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc a bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 3 giây so với A và có gia tốc bằng $a\,(m/s^2)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 12 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $20(m/s)$ **C.** $16(m/s)$ **D.** $13(m/s)$

Câu 9. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = 5$. Tính $I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x) + 2\sin x]\mathrm{d}x = 5$.

A. $I = 7$ **B.** $I = 5 + \dfrac{\pi}{2}$ **C.** $I = 3$ **D.** $I = 5 + \pi$

Câu 10. Cho $\int\limits_5^{21} \dfrac{dx}{x\sqrt{x + 4}} = a\ln 3 + b\ln 5 + c\ln 7$, với a, b, c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a - b = -2c$ **B.** $a + b = -2c$ **C.** $a + b = c$ **D.** $a - b = -c$

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Tính: $I = F(e) - F(1)$?

A. $I = \dfrac{1}{2}$ **B.** $I = \dfrac{1}{e}$ **C.** $I = 1$ **D.** $I = e$

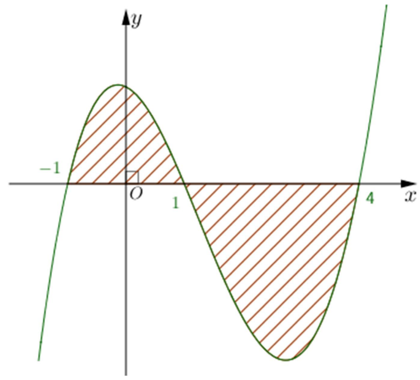
Câu 12. $\int\limits_0^1 e^{3x+1}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{3}(e^4+e)$ **B.** e^3-e **C.** $\frac{1}{3}(e^4-e)$ **D.** e^4-e

Câu 13. Cho $\int\limits_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\mathrm{d}x=a\ln 2+b\ln 3$ với a,b là các số nguyên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+2b=0$ **B.** $a+b=2$ **C.** $a-2b=0$ **D.** $a+b=-2$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=0, x=-1$ và $x=4$ (như hình vẽ bên). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=-\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$. **D.** $S=-\int\limits_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 15. Cho $\int\limits_1^e(1+x\ln x)\,\mathrm{d}x=ae^2+be+c$ với a, b, c là các số hữu tỷ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a+b=-c$ **C.** $a-b=c$ **D.** $a-b=-c$

Câu 16. Cho $\int\limits_{-1}^{2}f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_{-1}^{2}g(x)\mathrm{d}x=-1$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{2}\left[x+2f(x)-3g(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{17}{2}$ **B.** $I=\frac{5}{2}$ **C.** $I=\frac{7}{2}$ **D.** $I=\frac{11}{2}$

Câu 17. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{\pi^2+16\pi-4}{16}$. **B.** $\frac{\pi^2-4}{16}$. **C.** $\frac{\pi^2+15\pi}{16}$. **D.** $\frac{\pi^2+16\pi-16}{16}$.

Câu 18. $\int\limits_1^2\frac{dx}{3x-2}$ bằng

A. $2\ln 2$ **B.** $\frac{1}{3}\ln 2$ **C.** $\frac{2}{3}\ln 2$ **D.** $\ln 2$

Câu 19. Tích phân $\int\limits_0^2\frac{dx}{x+3}$ bằng

A. $\frac{2}{15}$ **B.** $\frac{16}{225}$ **C.** $\log\frac{5}{3}$ **D.** $\ln\frac{5}{3}$

Câu 20. Cho $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$ và $\int\limits_0^1 g(x)\mathrm{d}x=5$, khi đó $\int\limits_0^1\left[f(x)-2g(x)\right]\mathrm{d}x$ bằng

A. -8 **B.** 1 **C.** -3 **D.** 12

Câu 21. $\int_1^2 e^{3x-1}dx$ bằng

A. $\frac{1}{3}\left(e^5+e^2\right)$ **B.** $\frac{1}{3}\left(e^5-e^2\right)$ **C.** $\frac{1}{3}e^5-e^2$ **D.** e^5-e^2

Câu 22. Cho $\int_{16}^{55}\frac{dx}{x\sqrt{x+9}}=a\ln 2+b\ln 5+c\ln 11$, với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a+b=3c$ **B.** $a-b=-3c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=c$

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\sin^2 x+3$, $\forall x\in R$, khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2-2}{8}$. **B.** $\frac{\pi^2+8\pi-8}{8}$. **C.** $\frac{\pi^2+8\pi-2}{8}$. **D.** $\frac{3\pi^2+2\pi-3}{8}$.

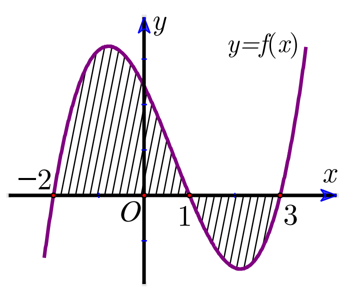
Câu 24. Tính tích phân $I=\int_1^2 2x\sqrt{x^2-1}dx$ bằng cách đặt $u=x^2-1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $I=\int_0^3\sqrt{u}du$ **B.** $I=\frac{1}{2}\int_1^2\sqrt{u}du$ **C.** $I=2\int_0^3\sqrt{u}du$ **D.** $I=\int_1^2\sqrt{u}du$

Câu 25. Một chất điểm A xuất phát từ O, chuyển động thẳng với vận tốc biến thiên theo thời gian bởi quy luật $v(t)=\frac{1}{180}t^2+\frac{11}{18}t\,(m/s)$, trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O, chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng $a\left(m/s^2\right)$ (a là hằng số). Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A. Vận tốc của B tại thời điểm đuổi kịp A bằng

A. $15(m/s)$ **B.** $10(m/s)$ **C.** $7(m/s)$ **D.** $22(m/s)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi cá đường $y=f(x)$, $y=0$, $x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx.$ **B.** $S=\int_{-2}^{1}f(x)dx-\int_1^3 f(x)dx.$

C. $S=-\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx.$ **D.** $S=\int_{-2}^{1}f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx.$

Câu 27. Tính tích phân $I=\int_0^{\pi}\cos^3 x.\sin x dx$.

A. $I=-\frac{1}{4}$ **B.** $I=-\frac{1}{4}\pi^4$ **C.** $I=-\pi^4$ **D.** $I=0$

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ .Biết $f(0)=4$ và $f'(x)=2\cos^2 x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$, khi đó $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng?

A. $\dfrac{\pi^2+8\pi+8}{8}$. **B.** $\dfrac{\pi^2+8\pi+2}{8}$. **C.** $\dfrac{\pi^2+6\pi+8}{8}$. **D.** $\dfrac{\pi^2+2}{8}$.

Câu 29. Biết $\int\limits_1^2 \dfrac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}dx=\sqrt{a}-\sqrt{b}-c$ với a,b,c là các số nguyên dương. Tính $P=a+b+c$

A. $P=18$ **B.** $P=46$ **C.** $P=24$ **D.** $P=12$

Câu 30. Cho $\int\limits_1^e (2+x\ln x)dx=ae^2+be+c$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a+b=c$ **B.** $a-b=c$ **C.** $a-b=-c$ **D.** $a+b=-c$

Câu 31. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(3x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^3 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{25}{3}$. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -9.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(4)=1$ và $\int_0^1 xf(4x)dx=1$, khi đó $\int_0^4 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 8. **B.** 14. **C.** $\dfrac{31}{2}$. **D.** -16.

Câu 33. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $f(2)=-\dfrac{2}{9}$ và $f'(x)=2x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng.

A. $-\dfrac{2}{3}$ **B.** $-\dfrac{19}{36}$ **C.** $-\dfrac{2}{15}$ **D.** $-\dfrac{35}{36}$

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(6)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(6x)\mathrm{d}x=1$, khi đó $\int\limits_0^6 x^2 f'(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{107}{3}$. **B.** 34. **C.** 24. **D.** -36.

Câu 35. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(5)=1$ và $\int\limits_0^1 xf(5x)dx=1$, khi đó $\int\limits_0^5 x^2 f'(x)dx$ bằng

A. 15 **B.** 23 **C.** $\dfrac{123}{5}$ **D.** -25

Câu 36. Cho $\int\limits_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=a+b\ln\dfrac{1+e}{2}$, với $a,\ b$ là các số hữu tỉ. Tính $S=a^3+b^3$.

A. $S=-2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$ **B.** $-\frac{2}{9}$ **C.** $-\frac{7}{6}$ **D.** $-\frac{11}{6}$

Câu 38. Cho $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{(x+2)^2}=a+b\ln 2+c\ln 3$ với a,b,c là các số hữu tỷ. Giá trị của $3a+b+c$ bằng

A. 2 **B.** 1 **C.** -2 **D.** -1

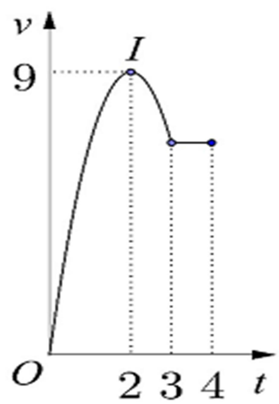
Câu 39. Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật đó bắt đầu chuyển động và $s(\mathrm{m})$ là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bào nhiêu?

A. $18(\mathrm{m/s})$ **B.** $108(\mathrm{m/s})$ **C.** $64(\mathrm{m/s})$ **D.** $24(\mathrm{m/s})$

Câu 40. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\int\limits_0^1 (x+1)f'(x)\mathrm{d}x=10$ và $2f(1)-f(0)=2$. Tính $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=1$ **B.** $I=-8$ **C.** $I=-12$ **D.** $I=8$

Câu 41. Một vật chuyển động trong 4 giờ với vận tốc v (km/h) phụ thuộc thời gian t (h) có đồ thị của vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 3 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2;9)$ với trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính quãng đường s mà vật di chuyển được trong 4 giờ đó.



A. $s=24$ (km) **B.** $s=28,5$ (km) **C.** $s=27$ (km) **D.** $s=26,5$ (km)

Câu 42. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,$ $\int\limits_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x=7$ và $\int\limits_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$. Tính tích phân $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

A. 4 **B.** $\frac{7}{5}$ **C.** 1 **D.** $\frac{7}{4}$

Câu 43. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2+2\cos 2x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Tính $I=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx.$

A. $I=-6$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=6$

Câu 44. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\dfrac{4}{35}$ **B.** $-\dfrac{71}{20}$ **C.** $-\dfrac{79}{20}$ **D.** $-\dfrac{4}{5}$

Câu 45. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $I_n=\int\limits_0^1 x^2(1-x^2)^n dx$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 46. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trong đoạn $[1;e]$, biết $\int\limits_1^e \dfrac{f(x)}{x}dx=1$, $f(e)=1$. Ta có $I=\int\limits_1^e f'(x).\ln x dx$ bằng

A. $I=4$ **B.** $I=3$ **C.** $I=1$ **D.** $I=0$

Câu 47. Biết $\int\limits_1^e \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=a\sqrt{e}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a.b$.

A. $P=4$. **B.** $P=-8$. **C.** $P=-4$. **D.** $P=8$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2$; $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^1 f(|2x-1|)\mathrm{d}x$.

A. $I=\dfrac{2}{3}$. **B.** $I=4$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=6$

Câu 49. Biết rằng $I=\int\limits_0^1 e^{\sqrt{3x+1}}dx=\dfrac{a}{b}.e^2$ với a,b là các số thực thỏa mãn $a-b=-2$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=10$ **B.** $S=5$ **C.** $S=4$ **D.** $S=7$

Câu 50. Cho tích phân $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{0}\cos 2x\cos 4x dx=a+b\sqrt{3}$, trong đó a,b là các hằng số hữu tỉ. Tính $e^a+\log_2|b|$.

A. -2. **B.** -3. **C.** $\dfrac{1}{8}$. **D.** 0.