Toán - Khối 11-Chương IV: Giới hạn hàm số -Hàm số liên tục.

PHẦN TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

A. Giới hạn dãy số.

I. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn 0 (hay có giới hạn là 0) nếu với mỗi số dương nhỏ tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = 0$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = 0$ nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Từ định nghĩa suy ra rằng:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \lim |u_n| = 0$.

b) Dãy số không đổi (u_n), với $u_n = 0$, có giới hạn là 0.

c) Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 nếu u_n có thể gần 0 bao nhiêu cũng được, miễn là n đủ lớn.

2. Một số dãy số có giới hạn 0

Định lí 4.1

Cho hai dãy số (u_n) và (v_n).
Nếu $|u_n| \le v_n$ với mọi n và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.

Định lí 4.2

Nếu $|q| < 1$ thì $\lim q^n = 0$.

Người ta chứng minh được rằng

a) $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

b) $\lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

c) $\lim \frac{1}{n^k} = 0$ với mọi số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim \frac{1}{n} = 0$.

d) $\lim \frac{n^k}{a^n} = 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ và mọi $a > 1$ cho trước.

II. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN.

1. Định nghĩa

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn là số thực L nếu $\lim (u_n - L) = 0$.

Kí hiệu: $\lim u_n = L$.
Dãy số có giới hạn là một số thực gọi là dãy số có giới hạn hữu hạn.

2. Một số định lí

Định lí 4.3

Giả sử $\lim u_n = L$. Khi đó

a) $\lim|u_n| = |L|$ và $\lim\sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}$.

b) Nếu $u_n \ge 0$ với mọi n thì $L \ge 0$ và $\lim\sqrt{u_n} = \sqrt{L}$.

Định lí 4.4

Giả sử $\lim u_n = L$, $\lim v_n = M$ và c là một hằng số. Khi đó

a) $\lim(u_n + v_n) = L + M$.

b) $\lim(u_n - v_n) = L - M$.

c) $\lim(u_n v_n) = LM$.

D) $\lim(cu_n) = cL$.

e) $\lim\dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{L}{M}$ (nếu $M \ne 0$).

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

Định nghĩa

Cấp số nhân lùi vô hạn là cấp số nhân có công bội q thỏa $|q| < 1$.

Công thức tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots = \frac{u_1}{1-q}$$

III. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN VÔ CỰC.

1. Dãy số có giới hạn $+\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ nếu với mỗi số dương tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều lớn hơn số dương đó.
Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = +\infty$ nếu u_n có thể lớn hơn một số dương lớn tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.
Người ta chứng minh được rằng:

a) $\lim\sqrt{u_n} = +\infty$.

b) $\lim\sqrt[3]{u_n} = +\infty$

c) $\lim n^k = +\infty$ với một số nguyên dương k cho trước.

Trường hợp đặc biệt : $\lim n = +\infty$.

d) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

2. Dãy số có giới hạn $-\infty$

Ta nói rằng dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ nếu với mỗi số âm tùy ý cho trước, mọi số hạng của dãy số, kể từ một số hạng nào đó trở đi, đều nhỏ hơn số âm đó.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$.

Nói một cách ngắn gọn, $\lim u_n = -\infty$ nếu u_n có thể nhỏ hơn một số âm nhỏ tùy ý, kể từ số hạng nào đó trở đi.

Nhận xét:

a) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = +\infty$.

b) Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $|u_n|$ trở nên lớn bao nhiêu cũng được miễn n đủ lớn. Do đó $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{|u_n|}$ trở nên nhỏ bao nhiêu cũng được, miễn n đủ lớn. Nói cách khác, nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

Định lí 4.5

Nếu $\lim|u_n| = +\infty$ thì $\lim\frac{1}{u_n} = 0$.

3. Một vài quy tắc tìm giới hạn vô cực

Quy tắc 1

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc 2

Nếu $\lim u_n = \pm\infty$ và $\lim v_n = L \neq 0$ thì $\lim(u_n v_n)$ được cho trong bảng sau:

$\lim u_n$	Dấu của L	$\lim(u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3

Nếu $\lim u_n = L \neq 0$ và $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0$ hoặc $v_n < 0$ kể từ một số hạng nào đó trở đi thì $\lim\frac{u_n}{v_n}$ được cho trong bảng sau:

Dấu của L	Dấu của v_n	$\lim\frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$

$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

Câu 1: $\lim\left(n^3-2n+1\right)$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Đáp án D.

Lời giải

Ta có: $n^3-2n+1=n^3\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)$.

Vì $\lim n^3=+\infty$ và $\lim\left(1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)=1>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim\left(n^3-2n+1\right)=+\infty$

Câu 2: $\lim u_n$, với $u_n=\frac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

A. 0. **B.** 5. **C.** 3. **D.** -7.

Hướng dẫn giải

Chọn B. Ta có: $\lim u_n=\lim\left(\frac{5n^2}{n^2}+\frac{3n}{n^2}-\frac{7}{n^2}\right)=\lim\left(5+\frac{3}{n}-\frac{7}{n^2}\right)=5$.

Câu 3: Giới hạn của dãy số (u_n), với $u_n=\frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Chia cả tử và mẫu của phân thức cho n^4 (n^4 là bậc cao nhất của n trong phân thức), ta được

$$\lim u_n=\lim\frac{n^3+2n+1}{n^4+3n^3+5n^2+6}=\lim\frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

Câu 4: Giới hạn của dãy số (u_n) với $u_n=\frac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}$, bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Cách 1: Chia cả tử và mẫu cho n^2 (n^2 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **mẫu thức**), ta được $u_n=\frac{3n^3+2n-1}{2n^2-n}=\frac{3n+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}$. Vậy $\lim u_n=\lim\left(\frac{3n}{2}\right)=+\infty$.

Cách 2: Chia cả tử và mẫu cho n^3 (n^3 là lũy thừa bậc cao nhất của n trong **phân thức**), ta được

$\lim u_n = \lim \dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$. Vì $\lim\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)=3>0$, $\lim\left(\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=0$ và $\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}>0$ với mọi n nên theo quy tắc 3, $\lim u_n = +\infty$.

Cách 3: Ta có $\lim u_n = \lim \dfrac{n^3\left(3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)} = \lim\left(n\dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n}}\right)$. Vì $\lim n = +\infty$ và

$\lim \dfrac{3+\dfrac{2}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n}} = \dfrac{3}{2}>0$ nên theo quy tắc 2, $\lim u_n = +\infty$.

Câu 5: $\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)$ bằng :

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$\lim\left(3.2^{n+1}-5.3^n+7n\right)=3^n\left(-5+6\left(\frac{2}{3}\right)^n+7\frac{n}{3^n}\right)=-\infty$$

Câu 6: $\lim\dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$ bằng :

A. 1. **B.** 7. **C.** $\dfrac{3}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$\lim\frac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}=\lim\frac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n+7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n+1}=\frac{7}{1}=7.$$

B. Giới hạn hàm số:

I. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại một điểm

1. Giới hạn hữu hạn tại một điểm

Định nghĩa 1:

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\backslash\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\backslash\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L$.

Nhận xét:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.

- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0.

Định nghĩa 2 (Giới hạn một bên):

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0;b)$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_0<x_n<b, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;x_0)$. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $a<x_n<x_0, x_n\to x_0$ ta có $\lim f(x_n)=L.$

Định lí 1

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

2. Giới hạn vô cực tại một điểm

Định nghĩa 3

Cho $(a;b)$ là một khoảng chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số $\{x_n\}$ mà $x_n\in(a;b)\setminus\{x_0\}, x_n\to x_0$ ta có $f(x_n)=+\infty.$

Lưu ý:

Các định nghĩa $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;\quad \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

3. Lưu ý:

a) $f(x)$ không nhất thiết phải xác định tại điểm x_0.

b) Ta chỉ xét giới hạn của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;b)$ (dù nhỏ) chứa x_0 mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ hoặc trên $(a;b)\setminus\{x_0\}$.

Chẳng hạn, hàm số $f(x)=\sqrt{x}$ có tập xác định là $D=[0;+\infty)$. Do đó ta không xét giới hạn của hàm số tại điểm $x_0=0$, do không có một khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm 0 mà $f(x)$ xác định trên đó cả. Tương tự vậy ta cũng không xét giới hạn của $f(x)$ tại mọi điểm $x_0<0$.

c) Ta chỉ xét giới hạn bên phải của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(x_0;b)$ (khoảng nằm bên phải x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Tương tự, ta chỉ xét giới hạn bên trái của $f(x)$ tại điểm x_0 nếu có một khoảng $(a;x_0)$ (khoảng nằm bên trái x_0) mà $f(x)$ xác định trên đó.

Chẳng hạn, với hàm số $f(x)=\sqrt{x-1}$ *, tại điểm* $x_0=1$*, ta chỉ xét giới hạn bên phải. Với hàm số* $g(x)=\sqrt{1-x}$ *, tại điểm* $x_0=1$*, ta chỉ xét giới hạn bên trái.*

d) $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x^-_o} f(x)=\lim\limits_{x\to x^+_o} f(x)=-\infty$

II. Định nghĩa giới hạn của hàm số tại vô cực

1. Giới hạn hữu hạn tại vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=L$.

LƯU Ý: Định nghĩa $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

Định nghĩa 5

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ với mọi dãy số (x_n), $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$ ta đều có $\lim f(x)=+\infty$.

LƯU Ý: Các định nghĩa: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

III. Một số giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x\to x_o} x=x_o$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o} c=c; \lim\limits_{x\to\pm\infty} c=c$ (c là hằng số)

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^k}=0$ (c là hằng số, k nguyên dương).

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ với k nguyên dương; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=-\infty$ nếu k là số nguyên lẻ; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=+\infty$ nếu k là số nguyên chẵn.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-f(x)\right]=-\infty$.

IV. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 2

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=M$. Khi đó

a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)\pm g(x)\right]=L\pm M$.

b) $\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]=LM$; $\lim\limits_{x\to x_o}\left[cf(x)\right]=cL$ với c là một là một hằng số.
c) $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}(M\neq 0)$.

Định lí 3

Giả sử $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=L$. Khi đó a) $\lim\limits_{x\to x_o}\left\|f(x)\right\|=\left\|L\right\|$. b) $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{L}$. c) Nếu $f(x)\geq 0$ với mọi $J\backslash\{x_o\}$, trong đó J là khoảng nào đó chứa x_o , thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_o}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

LƯU Ý: Định lí 2, định lí 3 vẫn đúng khi thay $x\to x_o$ bởi $x\to x^-_o, x\to x^+_o$.

V. Quy tắc về giới hạn vô cực

Các định lí và quy tắc dưới đây được áp dụng cho mọi trường hợp: $x\to x_o, x\to x^-_o, x\to x^+_o, x\to +\infty$ và $x\to -\infty$.

Tuyên nhiên, để cho gọn, ta chỉ phát biểu cho trường hợp $x\to x_o$.

Quy tắc 1 (Quy tắc tìm giới hạn của tích).

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\left[f(x)g(x)\right]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

STUDY TIP: Giới hạn của tích hai hàm số

- Tích của một hàm số có giới hạn hữu hạn khác 0 với một hàm số có giới hạn vô cực là một hàm số có giới hạn vô cực.

- Dấu của giới hạn theo quy tắc dấu của phép nhân hai số.

Quy tắc 2 (Quy tắc tìm giới hạn của thương)

$L=\lim\limits_{x\to x_o} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	+	$+\infty$

		-	$-\infty$
$L<0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

(Dấu của $g(x)$ xét trên một khoảng K nào đó đang tính giới hạn, với $x \neq x_o$).

VI. Các dạng vô định: Gồm $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty$ **và** $\infty - \infty$**.**

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)=\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Đáp án C.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $(0;+\infty)$.

Cách 1(sử dụng định nghĩa):

Giải sử (x_n) là một dãy số bất kỳ, thỏa mãn $x_n>0, x_n\neq 3$ và $x_n \to 3$ khi $n\to+\infty$. Ta có $\lim f(x_n)=\lim\frac{x_n^2+1}{2\sqrt{x_n}}=\frac{3^2+1}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ (áp dụng quy tắc về giới hạn hữu hạn của dãy số). Do đó $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2(sử dụng định lí về giới hạn hữu hạn):

Theo định lí 1 ta có:

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+1\right)}{\lim\limits_{x\to 3}\left(2\sqrt{x}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x^2+\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 3}2.\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}x.\lim\limits_{x\to 3}x+\lim\limits_{x\to 3}1}{\lim\limits_{x\to 2}2.\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}x}}=\frac{3.3+1}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Tuy nhiên trong thực hành, vì là câu hỏi trắc nghiệm nên ta làm như sau.

Cách 3: Vì $f(x)$ là hàm số sơ cấp xác định trên $(0;+\infty)$ chứa điểm $x_0=3$ nên $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=f(3)=\frac{10}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 2: Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây ?

A. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}=1$. **B.** $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+2}{x-2}=5$.

C. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+2}{x-2}=-1$. **D.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ không có giới hạn khi $x\to 3$.

Đáp án B

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ xác định trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. Ta có $3\in(2;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)=f(3)=\dfrac{3+2}{3-2}=5$.

Ví dụ 3: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Đáp án C.

Lời giải

Ta có $-2x^3+5x=x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2<0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$.

Vậy theo Quy tắc 1, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=+\infty$. Do đó chọn C.

Lưu ý 1:

- Để hiểu tại sao $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-2+\dfrac{5}{x^2}\right)=-2$ xin xem lại phần các giới hạn đặc biệt.

- Bài toán thuộc dạng tính giới hạn hàm số khi x dần tới vô cực, nhưng là khi $x\to-\infty$. Do đó không thể áp dụng ngay các kết quả đã biết về giới hạn dãy số, vì giới hạn dãy số được xét khi $n\to+\infty$. Ta chỉ có thể áp dụng các kĩ thuật đã biết đối với giới hạn dãy số.

Ví dụ 4: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)$ bằng:

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Đáp án A

Lời giải

Theo nhận xét trên thì $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$ ($x\to-\infty$, k chẵn và $a_k>0$). Thật vậy, ta có $3x^4-2x^2+1=x^4\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)=3>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3x^4-2x^2+1\right)=+\infty$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$. Khẳng định nào dưới đây đúng ?

A. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. **B.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.

C. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$. **D.** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ không tồn tại.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Có thể giải nhanh như sau : Vì x^2-2x+5 là một hàm đa thức của x nên có giới hạn tại vô cực. Mà $\sqrt{x^2-2x+5}>0$ với mọi x nên giới hạn của $f(x)=\sqrt{x^2-2x+5}$ tại $-\infty$ chắc chắn là $+\infty$.

Thật vậy, ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}$.

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}=1>0$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-2x+5}=+\infty$.

Ví dụ 6: Giới hạn của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}$ khi $x\to-\infty$ bằng:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** 3.

Đáp án A.

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}-|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$$

$$=|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)$$

Mà $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)=1-2=-1<0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[|x|\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}\right)\right]=-\infty$.

Lưu ý:

- Độc giả nên đọc lại phần giới hạn dãy số có chứa căn thức để hiểu hơn tại sao lại có định hướng giải như vậy (mà không đi nhân chia với biểu thức liên hợp).

- Có thể thấy như sau: Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{4x^2+1}=+\infty$.

Mà hệ số của x^2 trong $4x^2+1$ lớn hơn hệ số của x^2 trong x^2-x nên suy ra

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{4x^2+1}\right)=-\infty.$$

Ví dụ 7: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}$ bằng:

A. $\dfrac{2017}{3}$. **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Đáp án D.

Lời giải

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x^3-5x^5\right)=-\infty$ nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2017}{3x^3-5x^5}=0$.

Ví dụ 8: Giới hạn bên phải của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ khi $x\to2$ là

A. $+\infty$. **B.** $-\infty$. **C.** 3. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\dfrac{3x-7}{x-2}$ xác định trên $(-\infty;+\infty)\backslash\{2\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$, $x-2>0$ với mọi $x>2$ và $\lim\limits_{x\to2^+}(3x-7)=3.2-7=-1<0$. Do đó theo quy tắc 2 thì $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-7}{x-2}=-\infty$.

Ví dụ 9: Xét bài toán "Tìm $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}$", bạn Hà đã giải như sau:

Bước 1: Vì $\lim\limits_{x\to2^-}\left(2x^2-5x+2\right)=0$.

Bước 2: $2x^2-5x+2>0$ với $x<2$ và x đủ gần 2, Bước 3: $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(3x^2+x-1\right)=13>0$

Bước 4: nên theo quy tắc 2, $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=+\infty$.

Hỏi lời giải trên của bạn Hà đã sai từ bước thứ mấy ?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Đáp án B

Lời giải

Xét dấu biểu thức $g(x)=2x^2-5x+2$ ta thấy $g(x)<0$ với mọi $x\in(1;2)$.

Vậy lời giải sai từ bước 2. (Lời giải đúng cho ra kết quả $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-5x+2}=-\infty$).

C. **Hàm số liên tục:**

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng (a,b) và $x_0\in(a;b)$. Hàm số $y=f(x)$ được gọi là *liên tục* tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

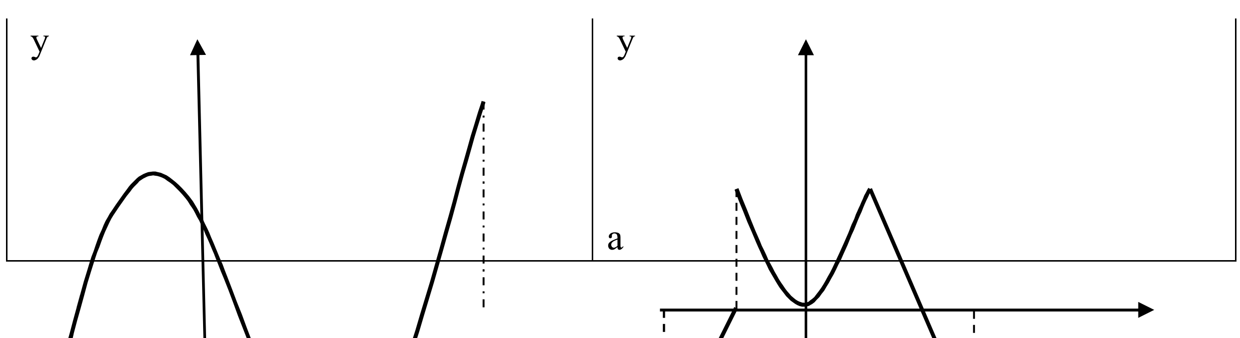
Hàm số $y=f(x)$ không liên tục tại x_0 được gọi là gián đoạn tại điểm đó.

Định nghĩa 2

Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một khoảng*** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.
Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***liên tục trên một đoạn*** $[a,b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$

Khái niệm liên tục của hàm số trên nửa khoảng như $[a;b),(a;b],[a;+\infty),(-\infty;b]$ được định nghĩa một cách tương tự.

Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó



a O b x	O b x
Đồ thị của hàm số liên tục trên khoảng $(a;b)$.	Đồ thị của hàm số không liên tục trên khoảng $(a;b)$.

Định lý 2

Giả sử $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_o. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f(x)+g(x), y=f(x)-g(x), y=f(x).g(x)$ liên tục tại điểm x_o.

b) Hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm x_o nếu $g(x)\neq 0$.

2. **Một số định lí cơ bản**

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức), các hàm số lượng giác, hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

(Các hàm số lũy thừa, hàm số mũ và hàm số logarit sẽ được học trong chương trình lớp 12)

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Nói cách khác:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN VỀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

DẠNG 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ

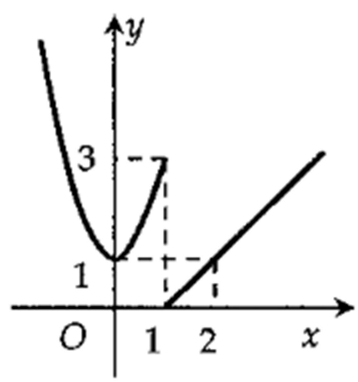
Phương pháp chung:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(a;b)$ và $x_0\in(a;b)$. Để xét tính liên tục của hàm số $y=f(x)$ tại x_0 ta làm như sau:

- Tính $f(x_0)$;
- Tính $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ thì kết luận hàm số liên tục tại x_0.
- Nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ không tồn tại hoặc $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ thì kết luận hàm số không liên tục tại x_0.

Khi xét tính liên tục của hàm số trên một tập, ta sử dụng Định lí 1, Định lí 2 đã nêu trong phần Lí thuyết.

Câu 1: Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Đáp án B.

Lời giải

Quan sát đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=3; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ không tồn tại. Do đó hàm số gián đoạn tại điểm $x=1$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(-3;2)$. **D.** $(-3;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số có dạng phân thức hữu tỉ xác định trên tập hợp $D=(-\infty;-3)\cup(-3;-2)\cup(-2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty;-3);(-3;-2);(-2;+\infty)$. Vì $(2;3)\subset(-2;+\infty)$ nên đáp án đúng là **B.**

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ là hàm phân thức hữu tỉ, có tập xác định là $(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty)$ nên theo Định lí 1, $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$, $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-5} & \text{khi } x>5\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=7$.

B. $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$.

Đáp án B.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định trên $D=[5;+\infty)\cup\{0\}$. Theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[5;+\infty)$. Do đó $f(x)$ liên tục trên $(5;+\infty)$ và tại $x=7$. Vậy A, C, D đúng suy ra B sai.

Thật vậy, vì không tồn tại khoảng $(a;b)$ nào chứa điểm $x=0$ mà $f(x)$ xác định trên $(a;b)$ nên không thể xét tính liên tục của $f(x)$ tại $x=0$. Do đó không thể khẳng định $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}3x+2 \text{ khi } x<-1\\ x^2-1 \text{ khi } x\geq -1\end{cases}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1]$.

C. $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

Đáp án C.

Lời giải

Trên $[-1;+\infty)$, $f(x)=x^2-1$ nên theo định lí 1, $f(x)$ liên tục trên $[-1;+\infty)$. Vậy chọn đáp án đúng là C.

Giải thích thêm:

Ta có $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(3x+2)=-1$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x^2-1)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \neq \lim\limits_{x\to(-1)^+}$ nên $\lim\limits_{x\to(-1)}$ không tồn tại.

Do đó $f(x)$ không liên tục tại $x=-1$ nên A, D sai.

Mặt khác $f(-1)=(-1)^2-1=0$. Vậy $\lim\limits_{x\to(-1)^-} \neq f(-1)$ nên $f(x)$ không liên tục trên $(-\infty;-1]$. Do đó B sai.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ mx+1 & \text{khi x=2}\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=\dfrac{17}{2}$. **B.** $m=\dfrac{15}{2}$. **C.** $m=\dfrac{13}{2}$. **D.** $m=\dfrac{11}{2}$.

Đáp án D.

Lời giải

$f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(2)=2m+1$ và $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+2x+4\right)=12$.

(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Để $f(x)$ liên tục tại $x=2$ thì $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 2m+1=12\Leftrightarrow m=\dfrac{11}{2}$.

Câu 7: Chon hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x=3$.

A. $m\in\varnothing$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Đáp án A.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

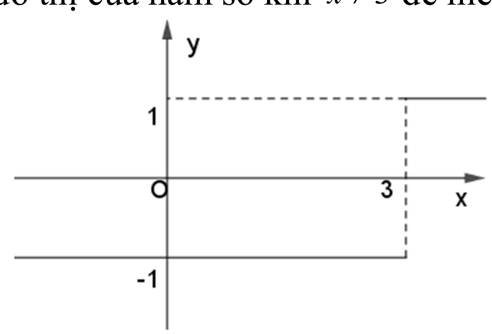
Ta có $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{|x-3|}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}(-1)=-1$.

Tương tự ta có $\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=1$.(có thể dùng MTCT để tính giới hạn của hàm số)

Vậy $\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$ nên $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ không tồn tại. Vậy với mọi m, hàm số đã cho không liên tục tại $x=3$.

Do đó đáp án đúng là **A.**

Ta có thể tam khảo thêm đồ thị của hàm số khi $x\neq 3$ để hiểu rõ hơn.



Câu 8: Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x} & \text{khi } x\ne 0\\ 4x^2+5b & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=5b$. **B.** $a=10b$. **C.** $a=b$. **D.** $a=2b$.

Đáp án B.

Lời giải

Cách 1: Theo kết quả đã biết thì $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+1}-1}{x}=\dfrac{a}{2}$. Mặt khác $f\left(0\right)=5b$. Để hàm số đã cho liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow\dfrac{a}{2}=5b\Leftrightarrow a=10b$. Vậy đáp án đúng là **B**.

Cách 2: Sử dụng MTCT. Chọn các giá trị cụ thể của a và b thỏa mãn từng hệ thức rồi tính toán cho đến khi được kết quả $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)$. Chẳng hạn với hệ thức ở đáp án A, chọn $a=5;b=1$ ta tìm được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5x+1}-1}{x}=\dfrac{5}{2};f\left(0\right)=5$ nên không thỏa mãn. Với hệ thức ở đáp án B, chọn $a=10;b=1$ ta được $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{10x+1}-1}{x}=5;f\left(0\right)=5$ nên thỏa mãn $\lim\limits_{x\to 0}f\left(x\right)=f\left(0\right)$. Do đó đáp án là B.

Câu 9: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m=3$. **B.** $m=4$. **C.** $m=5$. **D.** $m=6$.

Đáp án C.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Ta có $f\left(2\right)=3;\lim\limits_{x\to 2^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Nếu $m=6$ thì $\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-12x+20}=-\infty$ nên hàm số không liên tục tại $x=2$.

Nếu $m\ne 6$ thì ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+3m+2}=\dfrac{3}{6-m}$.

Để hàm số liên tục tại $x=2$ thì $\dfrac{3}{6-m}=3\Leftrightarrow 6-m=1\Leftrightarrow m=5$.

Với $m=5$ thì khi $x<2$, $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2-10x+17}$ liên tục trên $\left(-\infty;2\right)$.

Tóm lại với $m=5$ thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cách 2: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, liên tục trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Ta có $f(2)=3; \lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(\sqrt{2x-4}+3\right)=3$.

Thử lần lượt các giá trị từ A đến C thấy $m=5$ thỏa mãn $\lim_{x\to 2^-} f(x)=3$. Do đó chọn đáp án C.

DẠNG 2. CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Phương pháp chung:

Một phương pháp chứng minh phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(a;b)$:

- Chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Chứng minh $f(a).f(b)<0$.
- Từ đó kết luận phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm ta cần tìm được hai số a và b sao cho hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0$.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên đoạn $[a;b]$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

B. Nếu $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

C. Nếu phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong khoảng $(a;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ phải liên tục trên khoảng $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)>0$ thì phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Đáp án D.

Lời giải

A sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=x^2-5$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$ và liên tục trên đó, đồng thời $f(-3).f(3)=4.4=16>0$ nhưng lại có hai nghiệm $x_1=-\sqrt{5}; x_2=\sqrt{5}$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$.

B sai . vì thiếu điều kiện $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

C sai. Chẳng hạn xét hàm số $f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ khi x} <0 \\ x+2 \text{ khi } x\ge 0 \end{cases}$. Hàm số này xác định trên đoạn $[-3;3]$, có nghiệm $x=-1$ thuộc vào khoảng $(-3;3)$ nhưng gián đoạn tại điểm $x=0\in(-3;3)$, tức là không liên tục trên $(-3;3)$.

Vậy D đúng. Thật vậy:

- Vì hàm số $y=f(x)$ liên tục, tăng trên đoạn $[a;b]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(a)$, giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là $f(b)$.
- Nếu $f(a)>0$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số dương nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

+ Nếu $f(a)<0,$ do $f(a).f(b)>0$ nên suy ra $f(b)<0.$ Vậy giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[a;b]$ là một số âm nên không có giá trị nào của x trên khoảng $(a;b)$ làm cho $f(x)=0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ không thể có nghiệm trong khoảng $(a;b)$.

Câu 10: Cho phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ trong đó a,b,c là các tham số thực. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A. Phương trình (1) vô nghiệm với mọi a,b,c.

B. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c.

C. Phương trình (1) có ít nhất hai nghiệm với mọi a,b,c.

D. Phương trình (1) có ít nhất ba nghiệm với mọi a,b,c.

Lời giải

Đáp án B.

Dễ thấy $a=b=c=0$ thì phương trình (1) trở thành $x^3=0 \Leftrightarrow x=0.$ Vậy A, C, D sai. Do đó B đúng.

Giải thích thêm: Xét bài toán "Chứng minh rằng phương trình $x^3+ax^2+bx+c=0 \quad (1)$ luôn có ít nhất một nghiệm với mọi a,b,c". Ta có lời giải cụ thể như sau:

Đặt $f(x)=x^3+ax^2+bx+c.$ Ta có:

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=-\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_1$ sao cho $f(x_1)<0$.

+ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+ax^2+bx+c\right)=+\infty$ với mọi a,b,c nên tồn tại một giá trị $x=x_2$ sao cho $f(x_2)>0$.

Vậy $f(x_1).f(x_2)<0$ mà $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên khoảng $(x_1;x_2)$. Từ đó suy ra ĐPCM.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình: $\left(m^2-3m+2\right)x^3-3x+1=0$ có nghiệm.

A. $m\in\{1;2\}$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Lời giải

Đáp án B.

Nếu $m^2-3m+2=0$: Phương trình đã cho trở thành $-3x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$.

Nếu $m^2-3m+2\neq 0$: thì phương trình đã cho luôn có nghiệm.

Tóm lại với mọi $m\in\mathbb{R}$ thì phương trình đã cho luôn có nghiệm. Do đó B đúng.

PHẦN LUYỆN TẬP.

ĐỀ ÔN SỐ 1

Câu 1. Cho $u_n=\frac{6-3n}{5n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $-\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{6}{5}$. **C.** $-\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Câu 2. $\lim\frac{3^n+4^n}{4^n}$ bằng

A. 1. B. 0. C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{7}{4}$.

Câu 3: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào có giới hạn bằng 0?

A. $\left((0,23)^n\right)$ **B.** $\left((\sqrt{3})^n\right)$ **C.** $\left((1,99)^n\right)$ **D.** $\left((1)^n\right)$

Câu 4: Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$. **B.** $\lim\frac{2n^5-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **D.** $\lim\frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$.

Câu 5. Tính $\lim\frac{3n^3-n+7}{3+n^2}$

A. 3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 6. Tính $\lim n^3$

A. 3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 7. Tính $\lim\left(-3n^2+n+1\right)$

A. -3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 8. Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x+1}$.

A. $L=0$. **B.** $L=-1$ **C.** $L=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $L=\dfrac{1}{2}$.

Câu 9: Xét các mệnh đề sau:

(I). $\lim\limits_{x\to -2} x=2$.

(II). $\lim\limits_{x\to -2} 3=3$.

Trong 2 mệnh đề trên thì

A. Chỉ (II) đúng **B.** Chỉ (I) đúng **C.** Cả hai đều sai **D.** Cả hai đều đúng

Câu 10. Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=-\dfrac{5}{2}$ **C.** $L=\dfrac{7}{2}$. **D.** $L=\dfrac{1}{2}$.

Câu 11: Biết $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x-4}{x^2+3x-4}=\dfrac{a}{b},a,b\in Z,b\neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của $a.b$ bằng:

A. 32 **B.** 12 **C.** 23 **D.** 30

Câu 12: Cho $f(x)=\sqrt{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

(1) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$

(2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ không tồn tại.

A. (1) đúng và (2) sai. **B.** (1) sai và (2) đúng.

C. (1) và (2) đều sai. **D.** (1) và (2) đều đúng.

A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** $+\infty$

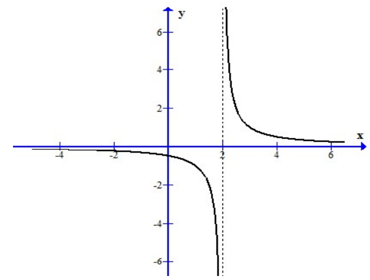
Câu 13: $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-2x-15}{x-3}$

A. 8 **B.** -2 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 14. Tính $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-2}{x}$.

A. $-\infty$. B. $+\infty$ C. 0 D. -2 .

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tính $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$



A. $-\infty$ **B.** 0 **C.** 2 **D.** $+\infty$

Câu 16. Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & (khi \ \ x > 0) \\ x & (khi \ x \le 0) \end{cases}$ trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **<u>Đúng</u>**?

A. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ B. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$ C. $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ D. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2$

Câu 17. Tính $L = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1}$

A. $L = -\infty$. B. $L = +\infty$ C. $L = \dfrac{1}{2}$. D. $L = 1$.

Câu 18. Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{|x^2 - 3x + 2|}{x - 2}$:

A. 3. **B.** $-\infty$. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 19. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 6x - 1} + \sqrt{3}x)$ bằng

A. $\sqrt{3}$. B. $-\infty$. C. $+\infty$ D. $2\sqrt{3}$.

Câu 20. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(2x^3 - 2x^2 + x - 1\right)$.

A. -2 B. 2 C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $f(x)$ liên tục tại $x = 1$. **B.** $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

C. $f(x)$ liên tục tại $x = -1$. **D.** $f(x)$ liên tục tại $x = 2019$.

Câu 22.Tìm các giá trị của tham số a để hàm số

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3} & khi\ x\neq 3\\ a & khi\ x=3\end{cases}$$ liên tục tại $x=3$.

A. $a=1$ **B.** $a=-2$ **C.** $a=4$ **D.** $a=2$

Câu 23. Cho các khẳng định **sau**

(I).Hàm số $y=\dfrac{x^2-5x+2}{x-2}$ lieâ tuïctreâ caøkhoaûg $\left(-\infty;2\right),\left(2;+\infty\right)$

(II) Hàm số $y=\sqrt{x^2+8}$ liên tục tại điểm x= 1.

(III).Hàm số $y=\sin x$ liên tục trên R

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 24. Tính giới hạn $\mathrm{L}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt[3]{x^3+1}\right)$.

A. $\mathrm{L}=\dfrac{-1}{2}$ **B.** $\mathrm{L}=-\infty$ **C.** $\mathrm{L}=0$ **D.** $\mathrm{L}=\dfrac{1}{2}$

Câu 25. Biết $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+ax+2}=b$, với a,b các số thực khác 0. Tính giá trị của biểu thức $T=a+b$

.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $-\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\dfrac{7}{2}$.

ĐỀ ÔN SỐ 2

Câu 1: Tính $\lim\dfrac{2n^2-7n+1}{4+2n-4n^2}$.

A. $-\infty$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. C. $-\dfrac{1}{2}$ D. $+\infty$

Câu 2 : Tính $\lim\dfrac{4.3^n+5.2^{n+1}}{2.3^n-2+7.5^n}$**.**

A. 2. B. 0. C. $-\dfrac{1}{2}$. D.1.

Câu 3 : Tính $\lim\left[3.\left(0.7\right)^n\right]$.

A.3. B.0. C. $+\infty$ D. $-\infty$

Câu 4 : Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 1?

A. $\lim(1,2)^n$ B. $\lim\dfrac{n-3n^3}{n^3-2n^2+3}$ .C. $\lim\dfrac{n-3n^3}{1-2n^2-3n^3}$ D. $\lim\dfrac{n-3n^3}{1-2n^2-3n^4}$

Câu 5: Tính $\lim\dfrac{n-n^4+7}{3+5n^2}$

A. 3. B.0. C. $+\infty$. D. $-\infty$.

Câu 6a : Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng $-\infty$?

A. $\lim 2n^2$ **.** **B.** $\lim n^5$**.** **C.** $\lim\left(-\dfrac{3}{n^2}\right)$ **D.** $\lim\left(-n^2\right)$

Câu 6b: Với k là số nguyên dương lẻ. Kết quả của $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k$ là

A. $-\infty$ B. $+\infty$ C. 0 D. 1

Câu 6c: Khẳng định nào sau đây là **<u>Sai</u>** ?

A. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n=+\infty$ B. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to3} 5=5$ D. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=-\infty$

Câu 7 : Tính $\lim\left(4+5n-4n^3\right)$

A. -4. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 4.

Câu 8 : Xét các mệnh đề sau:

(I): $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x+1}=+\infty$ (II): $\lim\limits_{x\to3}(3-x)=0$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai. B. (I) sai, (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng. D. Cả (I) và (II) đều sai

Câu 9 : Xét các mệnh đề sau:

(I): $\lim\limits_{x\to2} 5=5$ (II): $\lim\limits_{x\to3}(x)=3$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai. B. (I) sai, (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng. D. Cả (I) và (II) đều sai

Câu 10: Tính $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

A. $-\frac{1}{2}$. B. 0. C.- 2. D.1.

Câu 11 : Giới hạn của hàm số sau đây bằng bao nhiêu: $\lim_{x\to a}\frac{x^4-a}{x-a}$

A. $2a^2$ B. $3a^4$ C. $4a^3$ D. $5a^4$

Câu 12: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to x_o}[\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{f(x)}]$

B. $\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to x_o}f(x)}+\sqrt[3]{\lim_{x\to x_o}g(x)}$

C. $\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\sqrt[3]{\lim_{x\to x_o}[f(x)+g(x)]}$

D. $\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)+g(x)}=\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{f(x)}+\lim_{x\to x_o}\sqrt[3]{g(x)}$

Câu 13a : $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+6}-\sqrt{10}}{-x^2+5x-6}=\frac{a}{\sqrt{b}}$ .Khi đó $a+b$ là

A. 11 B.9 C. 3 D. 12

Câu13b : $\lim_{x\to 3}\frac{3-\sqrt{x+6}}{2x^2-3x-9}=-\frac{a}{b}$ $(a;b>0)$ .Khi đó giá trị của $a;b$ là

A $a=13;b=-673$. B. $a=37;b=-2000$ C. $a=-9;b=500$ D. $a=-1;b=81$

Câu 14a: Tổng $S=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}+...$ là

A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

Câu 14b: Hình vuông có cạnh bằng 1, người ta nối trung điểm các cạnh liên tiếp để được một hình vuông. Tiếp tục làm như thế đối với hình vuông mới (như hình bên). Tổng diện tích các hình tròn nội tiếp hình vuông liên tiếp đó bằng:

A. π **B.** $\dfrac{\pi}{2}$ **C.** $\dfrac{\pi}{4}$ **D.** $\dfrac{\pi}{8}$

Câu 15: Tính $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{-3x^2+x+13}{x-2}$.

A. -3. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 3 .

Câu 16: Nếu $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3ax^2-4x+5}{-2x^2+x+1}=-4$ thì giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $a\in(-\infty;-1)$. B. $a\in(-1;2)$. C. $a\in(0;4)$. D. $a\in\left(\dfrac{13}{5};+\infty\right)$

.

Câu 17 : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^n-2^n}{x-2}$ bằng:

A. $(n-1).2^{n-1}$ **B.** $n.2^{n-1}$ **C.** $n.2^n$ **D.** $(n-1).2^n$

Câu 18: Nếu $\lim\limits_{x\to 2017}\dfrac{x^2-ax+2017}{x+2017}=-1$ thì thì giá trị của a thuộc khoảng nào sau đây?

A. $a\in(-\infty;-2019)$. B. $a\in(-2019;2039)$. C. $a\in(-7;4)$. D. $a\in(2039;+\infty)$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4} & \text{khi } x\neq 4\\ 7 & \text{khi } x=4\end{cases}$. Cho các khẳng định sau:

(I) $\lim\limits_{x\to 4}f(x)=8$ (II) $f(4)=7$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (I) đúng, (II) sai. B. (I) sai, (II) đúng.

C. Cả (I) và (II) đều đúng. D. Cả (I) và (II) đều sai

Câu 20: Giả sử $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)=-\infty$, xét các mệnh đề sau

(I): $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)-g(x)\right]=+\infty$ (II): $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$

(III): $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[f(x)+g(x)\right]=0$

Có bao nhiêu mệnh đề đúng?

A. Cả ba mệnh đề đều đúng **B.** Không có mệnh đề nào đúng
C. Chỉ có một mệnh đề đúng **D.** Có hai mệnh đề đúng

Câu 21: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+1).(x^2+1).(x^3+1)...(x^{11}+1)}{\left[(11x)^{11}+1\right]^6}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{66}$ **B.** 11^{66} **C.** $\dfrac{1}{66^{11}}$ **D.** $\left(\dfrac{1}{11}\right)^{66}$

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$. Tìm khẳng định **đúng**:

A. không tồn tại $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ **B.** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=+\infty$

C. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$ **D.** $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

Câu 23: Cho $f(x)=\dfrac{x^2+2}{3\sqrt{x}}$. Tính $\lim\limits_{x\to3}f(x)$.

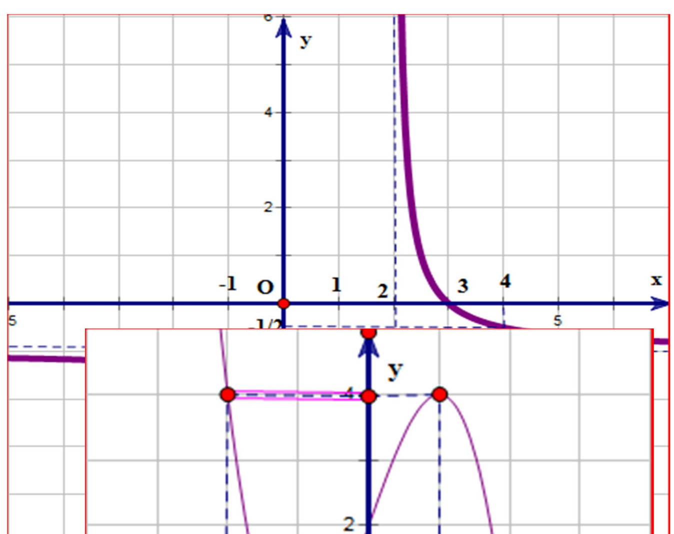
A. 0 B. $\dfrac{11\sqrt{3}}{9}$ C. $\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ D. 3

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-5} & (x\ge3)\ (1)\\ \dfrac{x^2-5}{x+2} & (x<3)(2)\end{cases}$

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào sau đây để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x\to3$?

A. 15. B. 2. C.- 1. D.- 2.

Câu 25a: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét các khẳng định sau:

$(I)\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$(II)\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=+\infty$

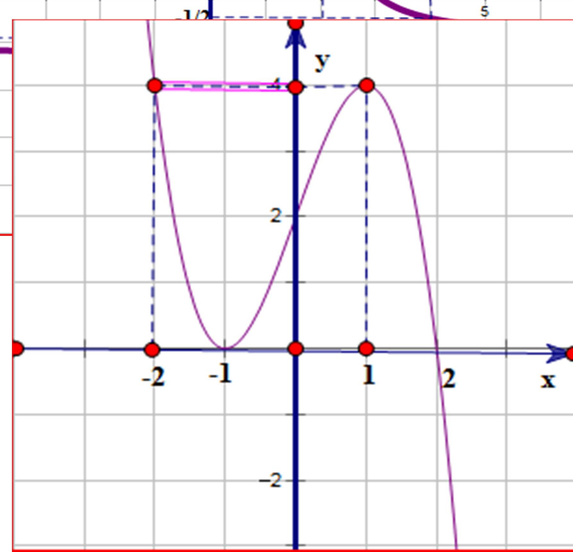
$(III)\lim\limits_{x\to4}f(x)=-\dfrac{1}{2}$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A.0 B.1.

C.2. D.3

Câu 25b: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét các khẳng định sau:

$(I)\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

$(II)\lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=4$

$(III)\lim\limits_{x\to2} f(x)=0$

Có bao nhiêu khẳng định đúng?

A.0 B.1.

C.2. D.3

Câu 26a: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại $x_0=0$?

A. $a=\dfrac{3}{4}$ **B.** a = 2 **C.** a = 1 **D.** a = 3

Câu 26b: Cho hàm số: $f(x)=\begin{cases}ax^2 & khi\ x\le 2\\ x^2+x-1 & khi\ x>2\end{cases}$ để f(x) liên tục trên R thì a bằng?

A. $\dfrac{5}{4}$ **B.** 4 **C.** 3 **D.** 2

Câu 27: Nếu $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=4$ và $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-2}{x-2}=3$ thì $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{f(x).g(x)+3}-3}{x-2}$ bằng:

A. 7 **B.** 17 **C.** $\dfrac{17}{6}$ **D.** $\dfrac{23}{7}$

Câu 28: . Chọn khẳng định **đúng**

A. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a$ **B.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$

C. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a$ **D.** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$

Câu 29: Cho hàm số $f(x)=a\sqrt{x^2+x+3}-2\sqrt{x^2+1}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

A. $a\in\mathbb{R}$. **B.** $a\in(-\infty;2)$. **C.** $a\in(2;+\infty)$. **D.** $a=2$

Câu 30: Nếu $\lim u_n=9$ thì $\lim\dfrac{2018}{\sqrt{u_n+7}}$ bằng

A. 504,5 **B.** 126,125 **C.** 2018 **D.** 224,2

ĐỀ ÔN SỐ 3

Câu 1: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x-1}-x+1)$ bằng

A. 3 . **B.** $-\infty$. **C.** $+\infty$ **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 2: $\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1+2x}{x-2}$ bằng

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$ **C.** 2. **D.** 1

Câu 3: Tính $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

A. 2 **B.** 1 **C.** $-\infty$ **D.** $+\infty$

Câu 4: Tính $\lim\dfrac{3n^3-n+7}{3+2n^2}$

A. $-\infty$ **B.** $+\infty$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** 0

Câu 5: Tìm $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2-1}+x}$

A. -1 **B.** 1 **C.** $+\infty$ **D.** $-\infty$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} khi\ x\neq2\\ 3x-m\ khi\ x=2\end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x=2$.

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=9$. **D.** $m=-9$.

Câu 7: Cho $u_n=\dfrac{1-3n}{5n}$. Khi đó $\lim u_n$ bằng

A. $\dfrac{6}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{6}{5}$. **D.** $-\dfrac{3}{5}$.

Câu 8: Tính $L=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+5x-6}{1-x^2}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{5}{2}$. **C.** $L=-\dfrac{7}{2}$ **D.** $L=\dfrac{7}{2}$.

Câu 9: $\lim\dfrac{4.3^n+3.4^n}{4^n}$ bằng

A. $\frac{3}{4}$ **B.** 1. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 3.

Câu 10: Tính $\lim\left(-3n^2-n+1\right)$

A. $+\infty$ **B.** $-\infty$ **C.** 0 **D.** – 3

Câu 11: Tính $L=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{1-2x}$.

A. $L=-\frac{1}{2}$. **B.** $L=0$. **C.** $L=-1$ **D.** $L=\frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K chứa điểm x_0. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

B. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

C. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

D. $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.

Câu 13: Cho $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+5}+x\right)=5$. Giá trị của a là:

A. 6 **B.** 10 **C.** -10 **D.** -6

Câu 14: Cho $f(x)=\sqrt{1-x}$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}=0$ **B.** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}=1$.

C. $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x}$ không tồn tại. **D.** $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0$

Câu 15: Tính $L=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+5x-6}{1-x^2}$

A. $L=+\infty$ **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=-1$. **D.** $L=1$.

Câu 16. $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 17. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng -1?

A. $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **B.** $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^2-1}$. **C.** $\lim \frac{2n^2-3}{-2n^3+2n^2}$. **D.** $\lim \frac{2n^3-3}{-2n^2-1}$.

Câu 18. $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^2+3x-4}{x^2+4x}$ bằng:

A. -1 **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** 1 **D.** $-\frac{5}{4}$

Câu 19. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ bằng

A. $-\infty$ **B.** $-\frac{1}{2}$ **C.** -1 **D.** 0

Câu 20. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)$ bằng : (T1/10L12-8)

A. 1 **B.** 2 **C.** $+\infty$ **D.** 0

Câu 21. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$ **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** 2

Câu 22. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(4x^5-3x^3+x+1\right)$:

A. 4. **B.** 0. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Câu 23. Cho hàm f(x) xác định bởi f(x) = $\begin{cases} x^2-3 & \text{khi } x\geq 2 \\ x-1 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Chọn kết quả đúng của $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

A. -1. **B.** Không tồn tại. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 24. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi} \quad x>2 \\ ax+\frac{1}{4} & \text{khi} \quad x\leq 2 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục tại 2.

A. $a=3$. **B.** $a=0$. **C.** $a=2$. **D.** $a=1$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề **sai** là:

A. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

B. Phương trình $f\left(x\right)=0$ có nghiệm trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

C. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

D. Phương trình $f\left(x\right)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.